

**Consignes** : Documents interdits. Composer avec un stylo. La feuille double doit porter vos nom, prénom, et signature, cachés par collage. Numéroter les éventuelles feuilles intercalaires. Toute réponse doit être justifiée.

**Exercice 1** (9 pts) Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  tel que  $X$  prend ses valeurs dans  $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$  et  $Y$  dans  $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$  dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0.2	0.2	$\alpha$
$x = 0$	0.1	0.1	0.05
$x = 1$	0.2	0	0.1

1. Donner la valeur de  $\alpha$  en justifiant votre réponse.
2. Calculer la loi marginale de  $X$ .
3. Calculer la loi marginale de  $Y$ .
4. Montrer que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.
5. Calculer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = 1$ .
6. En déduire  $\mathbb{E}[X|Y = 1]$ .
7. Calculer l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Y \neq 2$ .
8. Calculer  $\mathbb{E}[XY]$ .
9. En déduire  $\text{Cov}(X, Y)$ .

**Exercice 2** (6 pts) Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. de densité :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2(e^2 - 1)} x e^y & \text{si } (x, y) \in [0, 2]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de  $X$ .
2. Déterminer la densité de  $Y$ .
3. Est-ce que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ?
4. On pose  $Z = e^Y$ . Déterminer la densité de  $Z$ .
5. Donner  $\mathbb{E}[Z]$ .
6. Donner  $\mathbb{V}[Z]$ .

**Exercice 3** (Cours, 5 pts). Soit  $X$  une v.a. de loi Bernoulli  $\mathcal{B}(\theta)$ , i.e. :  $\mathbb{P}(X = x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$ ,  $\forall x \in \{0, 1\}$  où  $\theta \in ]0, 1[$  est le paramètre inconnu que l'on estime à partir d'un échantillon i.i.d  $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(\theta)$ . Soit  $\hat{\theta}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

1. Retrouver que  $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
2. Est-il sans biais ?
3. Quelle est sa variance ?
4. Est-il convergent ?
5. Si oui, quelle est sa loi limite ?