Université de Caen
Licence 3 MIASHS-Maths

Probabilités et Statistique
Année 2018-2019

TD - partie 3

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Sa densité est notée $f_X(x)$ et sa fonction de répartition est notée $F_X(x)$.

1. Soit la variable aléatoire Z définie par $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
   (a) Quelle est la densité de Z ?
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable $U = aZ + b$, $a \in \mathbb{R}^\star$; et $b \in \mathbb{R}$, en fonction de la fonction de répartition de Z.
   (c) En déduire la loi de U.
2. Soit la variable aléatoire positive T telle que : $X = \ln T$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable T, notée $F_T(x)$, en fonction de $F_X(x)$.
   (b) En déduire la densité de T et reconnaître sa loi.
3. Soit la variable aléatoire suivante : $Y = \left(\frac{X-\mu)}{\sigma}\right)^2$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y, notée $F_Y(x)$, en fonction de $F_X(x)$.
   (b) En déduire la densité de Y et reconnaître sa loi.
   (c) Calculer l'espérance de Y.
   (d) On donne $\mathrm{Var}(Y) = 2$. En déduire $\mathbb{E}(X-\mu)^4$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a i.i.d suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que (U, V) est un couple Gaussien.
2. Montrer que les v.a U et V sont indépendantes.

Exercice 3. Soit $V = (X, Y)^t$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 4$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 1$, et les v.a $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de V.
2. Montrer que le vecteur $W = (X + Y, 2X - Y)^t$ est gaussien.
3. Déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 4. Soient X_1 et X_2 deux v.a i.i.d suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^t$ le vecteur aléatoire tel que

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B},$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ et $\mathbf{B} = (2, 3)^t$.

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.
2. Déterminer la loi de $\mathbf{Z} = (Y_1 + Y_2 + 1, 3Y_1 - Y_2)^t$.
3. Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2 + 1$, et la loi de $3Y_1 - Y_2$.

⋆

Exercice 5. Une densité de probabilité (ou loi de probabilité dans le cas discret) d'une v.a réelle X, notée $f(x;\theta)$ appartient à la *famille exponentielle* si $f(x;\theta)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x;\theta) = \exp[\eta(\theta)T(x) + a(\theta) + b(x)]\cdot \tag{1}$$

où les fonctions η, T, a et b sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. La statistique $T(x)$ est appelée statistique exhaustive naturelle et le paramètre $\eta = \eta(\theta)$ est appelé paramètre naturel. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x;\theta)$ appartenant à la famille exponentielle.
Déterminer une statistique exhaustive pour le paramètre θ pour un n-échantillon i.i.d $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a de densité $f(x;\theta)$.

Exercice 6. Soit X une v.a suivant une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e, $\forall x \in \mathbb{N}$:

$$p_X(x;\lambda) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot$$

Étant donné un n-échantillon i.i.d $(X_1, \ldots, X_n)$ généré suivant une loi de Poisson de paramètre λ, $p_X(x;\lambda)$

1. Déterminer une statistique exhaustive pour λ.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de λ. En déduire son expression en fonction de la statistique exhaustive calculée dans la question précédente.

Exercice 7. Estimateurs et détermination de la Borne Inférieure de Cramér-Rao (CRLB) : Soit X une v.a. gaussienne univariée de densité :

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance μ (variance σ^2 connue)
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'espérance μ
3. Montrer qu'il est sans biais
4. En déduire qu'il est efficace
5. Calculer la la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de la variance σ^2 (espérance μ connu)
6. La variance empirique notée S^2 est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance σ^2. Son espérance est $\frac{n-1}{n}\sigma^2$ et sa variance est $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

   En déduire son efficacité.

   Comment peut-on faire pour trouver un estimateur efficace de la variance ?