Université de Caen	**Examen Terminal du 17 décembre 2018. Durée 2h**	**Probabilités et Statistique 3**
UFR des Sciences	Par Faïcel Chamroukhi	**L3 Maths-MIASHS**

Consignes :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

Exercice 1 *(5 pts)* Un téléopérateur reçoit en moyenne dix appels par jour. On suppose que le nombre d'appels est distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité qu'un jour le téléopérateur reçoive :

1. aucun appel ;
2. 2 appels ;
3. au moins 3 appels.

Notez que le résultat final du calcul de chacune de ces trois probabilités peut être donné sous la forme d'une expression numérique simplifiée et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la calculette.

Exercice 2 *(5 pts)* Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité jointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
3. Déterminer une densité de X.
4. Déterminer une densité de Y.
5. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 3 *(5 pts)* Soient X_1 et X_2 deux v.a Gaussiennes décorrélées où $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1,1)$.
Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ le vecteur aléatoire tel que $\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ et $\mathbf{b} = (1,2)^\top$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y})$.
2. En déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.
3. En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire ρ_Y entre Y_1 et Y_2.

Exercice 4 *(5 pts).* Soit X une v.a. Gaussienne de densité :

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ i.i.d selon la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit μ le paramètre inconnu à estimer (on suppose que la variance σ^2 est connue).

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance μ.
2. Soit $\widehat{\mu}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ
   (a) Définir et calculer $\widehat{\mu}$.
   (b) Montrer qu'il est efficace.
   (c) Montrer qu'il est convergent.
   (d) Quelle est sa loi ?