

TD - partie 3

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Sa densité est notée f_X et sa fonction de répartition est notée F_X .

1. Soit la variable aléatoire Z définie par $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
 - (a) Quelle est la densité de Z ?
 - (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable $U = aZ + b$, $a \in \mathbb{R}^*$; et $b \in \mathbb{R}$, en fonction de la fonction de répartition de Z .
 - (c) En déduire la loi de U .
2. Soit la variable aléatoire positive T telle que : $X = \ln T$
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable T , notée $F_T(x)$, en fonction de $F_X(x)$.
 - (b) En déduire la densité de T et reconnaître sa loi.
3. Soit la variable aléatoire suivante : $Y = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y , notée $F_Y(x)$, en fonction de $F_X(x)$.
 - (b) En déduire la densité de Y et reconnaître sa loi.
 - (c) Calculer l'espérance de Y .
 - (d) On donne $\text{Var}(Y) = 2$. En déduire $\mathbb{E}(X - \mu)^4$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a i.i.d suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que (U, V) est un couple Gaussien.
2. Montrer que les v.a U et V sont indépendantes.

Exercice 3. Soit $V = (X, Y)^\top$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$, et les v.a $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de V .
2. Montrer que le vecteur $W = (X + Y, 2X - Y)^\top$ est gaussien.
3. Déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 4. Soient X_1 et X_2 deux v.a i.i.d suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ le vecteur aléatoire tel que

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B},$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ et $\mathbf{B} = (2, 3)^\top$.

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} .
2. Déterminer la loi de $\mathbf{Z} = (Y_1 + Y_2 + 1, 3Y_1 - Y_2)^\top$.
3. Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2 + 1$, et la loi de $3Y_1 - Y_2$.

*

Exercice 5. Une densité de probabilité (ou loi de probabilité dans le cas discret) d'une v.a réelle X , notée $f(x; \theta)$ appartient à la *famille exponentielle* si $f(x; \theta)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x; \theta) = \exp[\eta(\theta)T(x) + a(\theta) + b(x)]. \quad (1)$$

où les fonctions η , T , a et b sont à valeurs dans \mathbb{R} . La statistique $T(x)$ est appelée statistique exhaustive naturelle et le paramètre $\eta = \eta(\theta)$ est appelé paramètre naturel. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x; \theta)$ appartenant à la famille exponentielle.

Déterminer une statistique exhaustive pour le paramètre θ pour un n -échantillon i.i.d (X_1, \dots, X_n) de v.a de densité $f(x; \theta)$.

Exercice 6. Soit X une v.a suivant une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e, $\forall x \in \mathbb{N}$:

$$p_X(x; \lambda) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Étant donné un n -échantillon i.i.d (X_1, \dots, X_n) généré suivant une loi de Poisson de paramètre λ , $p_X(x; \lambda)$

1. Déterminer une statistique exhaustive pour λ .
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de λ . En déduire son expression en fonction de la statistique exhaustive calculée dans la question précédente.

Exercice 7. Estimateurs et détermination de la Borne Inférieure de Cramér-Rao (CRLB) : Soit X une v.a. gaussienne univariée de densité :

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance μ (variance σ^2 connue)
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'espérance μ
3. Montrer qu'il est sans biais
4. En déduire qu'il est efficace
5. Calculer la la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de la variance σ^2 (espérance μ connu)
6. La variance empirique notée S^2 est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance σ^2 . Son espérance est $\frac{n-1}{n}\sigma^2$ et sa variance est $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.
En déduire son efficacité.
Comment peut-on faire pour trouver un estimateur efficace de la variance ?